

Colles de Maths - semaine 19 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Quels sont les groupes qui possèdent un nombre fini de sous-groupes ?

Exercice 2

1. Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G, x^2 = e$. Montrer que l'ordre de G est une puissance de 2.
Indication : On pourra commencer par montrer que G est abélien.
2. En déduire que tout groupe d'ordre $2p$ avec p premier possède un élément d'ordre p .

Exercice 3

1. Soit G un groupe abélien fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G .
2. En déduire que si K est un corps, tout sous-groupe fini de K^* est cyclique.

Exercice 4 Soit K un corps et G un sous-groupe fini de K^* . Dénombrer l'ensemble des éléments de G d'ordre d pour tout d diviseur de $|G|$, et en déduire que G est cyclique.

Exercice 5 Soit G un groupe abélien fini et H un sous-groupe de G . Soit $\chi : H \rightarrow \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes. Montrer que χ se prolonge en un morphisme de groupe $\tilde{\chi} : G \rightarrow \mathbb{C}^*$.